Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Úrokové míry

Dominika Holotňáková

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2011

Tento priestor by som chcela využiť na poďakovanie sa vedúcemu mojej bakalárskej práce Doc. RNDr. Janovi Hurtovi, CSc. za jeho pripomienky, návrhy, odborné rady a množstvo trpezlivosti a času, ktoré mi pri spracovávaní mojej práce venoval. Zároveň by som rada poďakovala svojim rodičom a priateľom za neustálu podporu počas celého štúdia.

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a dalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, hlavne skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o užití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 1.8.2011 Dominika Holotňáková

Názov práce: Úrokové míry
Autor: Dominika Holotňáková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúci bakalárskej práce: Doc. RNDr. Jan Hurt CSc.

Abstrakt: Práca je zameraná na štúdium úrokových mier. Pozostáva zo štyroch kapitol. Prvá kapitola poskytuje úvod do danej problematiky, uvádza základnú terminológiu a rôzne postupy úročenia. Druhá kapitola v krátkosti predstavuje teoretické jednofaktorové a dvojfaktorové modely úrokových mier, pričom sa zameriava predovšetkým na Vašíčkov, Dothanov a Cox-Ingersoll-Rossov model, ktoré použijeme v praktickej časti práce. Tretia kapitola je venovaná vnútornej politike bánk, popisuje najvýznamnejšie faktory ovplyvňujúce výšku úrokovej sadzby a úverového limitu. Posledná časť práce je praktickou aplikáciou jednofaktorových modelov na reálne dáta. V úvode kapitoly sú popísané postupy na odhad parametrov, ktoré sa následne použijú pre jednotlivé modely. Numericky odhadnuté parametre sú potom vstupom pre simuláciu výnosových kriviek jednofaktorovými modelmi.

Kľúčové slová: úroková miera, Vašíckov model, CIR model, odhad parametrov, politika bánk

Title: Interest Rates
Author: Dominika Holotňáková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt CSc.

Abstract: This thesis is focused on the study of interest rates, It consists of four chapters. The first chapter provides introduction to this issue, presents basic terminology and different method of interest rate process. The second chapter represents theoretical one-factor and two-factor models of interest rates, it is mainly aimed at Vasicek, Dothan and Cox-Ingersoll-Ross model, which are used in the practical part. The third chapter is devoted to internal bank policy, describing the most important factors influencing amount of interest rate and credit limit. The last part of the paper is the practical application of one-factor models on real data. At the beginning of the chapter, we describe methods of parameters estimation, which are used for individual models. Numerically estimated parameters are inputs for simulations of yield curves by these models.

Keywords: interest rate, Vasicek model, CIR model, parameter estimation, bank policy

Obsah

Úvod

Úroková miera patrí nepochybne k základným veličinám v oblasti ekonomiky. Je faktorom určujúcim cenu peňazí vo finančných obchodoch, zabezpečuje stabilitu štátnej meny, vplýva na výmenné kurzy a je tiež nástrojom na posudzovanie výnosnosti obchodných projektov.

V 80. a 90. rokoch v dôsledku krízy sa začala na finančných trhoch zväčšovať nestabilita, čoho hlavným dôsledkom bolo zvýšenie volatility úrokových mier. Snaha zabrániť možnosti straty zo strany investora viedla k vzniku a rozvoju finančných derivátov. Medzi zložky ovplyvňujúce ceny týchto derivátov patria práve úrokové miery. V tejto práci sa zameriame na modely, kde jediným zdrojom neistoty je krátkodobá úroková miera. V prvej časti sa budeme venovať terminológii týkajúcej sa úročenia a popíšeme jednotlivé postupy úrokovania.

Pre modelovanie vývoja úrokovej sadzby sa využívajú predovšetkým stochastické procesy. V druhej kapitole sa preto zameriame na popis základných modelov sledujúcich Wienerov proces, popísané stochastickou diferenciálnou rovnicou. Jednotlivé predpisy budú ďalej využívané pre praktické ukážky nasimulovaných vývojov sadzieb pomocou reálnych dát.

Treťou kapitolou chceme poukázať na najvýznamnejšie faktory, ktoré vo finančnej sfére ovplyvňujú výšku úrokových sadzieb a úverových limitov. Uvedieme krátky popis jednotlivých zložiek, pričom v časti venovanej úverom sa zameriame na firmy.

Posledná kapitola je praktickou ukážkou simulácie výnosových kriviek. Aplikuje sa na jednofaktorové modely s použitím parametrov získaných odhadom zo skutočných hodnôt výnosov štátnych dlhopisov.

Cieľom tejto práce je vysvetliť rôzne spôsoby modelovania časovej štruktúry úrokových mier a poukázať na rozdiely medzi výnosovými krivkami, ktoré opisujú dané modely.

1. Základy

Dôležitou veličinou pri uzatváraní finančných obchodov je *úrok*. Je významným faktorom ovplyvňujúcim výhodnosť týchto obchodov ako z pohľadu veriteľa, tak i dlžníka. V prvom prípade môžeme úrok chápať ako akúsi odmenu za poskytnutú pôžičku. Súvisí predovšetkým s dočasnou stratou dispozičného práva na nakladanie s týmito peniazmi, podstúpenie rizika a taktiež s možným poklesom ich hodnoty počas trvania pôžičky vplyvom inflácie. Z hľadiska dlžníka sa úrok považuje za cenu získania úveru. Aj napriek faktu, že dlžník platí vysoké čiastky za čerpanie pôžičky, je jej získanie považované za prísnosné, pretože poskytuje tejto strane okamžité peňažné prostriedky, ktoré môže následne investovať alebo nakúpiť teraz dostupný nevyhnutný tovar či služby. Úrok, ktorý je percentuálne vyjadrený z hodnoty imania sa nazýva *úroková sadzba.* V každom hospodárstve predstavuje táto miera veľmi doležitý ekonomický faktor. Spôsob, akým sa úroky pripočítavajú ku kapitálu nazývame *úročenie.*Poznatky spracované v tejto kapitole vychádzajú predovšetkým z [2] a [3].

1.1 Jednoduché a zložené úročenie

Označme PV (*present value, súčasná hodnota*) počiatočnú peňažnú čiastku a i nech je úroková miera pre danú časovú periódu. Úrok zaplatený na konci obdobia je súčinom PV a i. Na konci obdobia je akumulovaná hodnota peňazí (*future value, budúca hodnota*)určená vzťahom

$$FV = PV(1 + i). \tag{1.1}$$

V praxi sa prevažne stretávame s prípadmi, kedy sa peniaze úročia cez viac než jednu periódu. Nech T označuje počet period a i je úroková miera v každom období. Budúcu hodnotu určíme nasledovne:

jednoduché úročenie - úroky sa ku kapitálu nepripisujú, teda na konci každého obdobia sa získava úrok len z počiatočnej hodnoty. Budúca hodnota po T obdobiach je:

$$FV_T = PV(1 + iT). \tag{1.2}$$

Táto varianta sa používa zvyčajne v situáciach kedy doba pôžičky nepresiahne jeden rok.

zložené úročenie - na rozdiel od jednoduchého úročenia je po každej periode k pôvodnej položke prirátaný úrok. V ďalšom období sa potom úročí táto navýšená čiastka. Odpovedajúca budúca hodnota je:

$$FV_T = PV(1+i)^T. \tag{1.3}$$

V prípade že T nie je celé číslo, používa sa pri úročeni kombinácia jednoduchého a zloženého modelu. Nech $T = \lfloor T \rfloor + \{T\}$, kde $\lfloor \rfloor$ označuje celú časť a $\{\}$ značí zvyšok. Potom budúcu hodnotu definujeme vzťahom:

$$FV_T = PV(1+i)^{\lfloor T \rfloor}(1+i\{T\}). \tag{1.4}$$

Väčšinou je úrok pripisovaný raz ročne, avšak existujú i prípady, kedy sa úročí viackrát ročne (polročne, mesačne, atd.). Perióda úročenia sa teda môže líšiť od frekvencie. Je nutné rozlišovať fakt, že napríklad ročná úroková miera i (nominálna úroková miera) pri mesačnom úročení dáva sadzbu $i/12$ každý mesiac. Všeobecne označme $i^{(m)}$ nominálnu mieru za jednotku času úročenú $m$krát. Máme m frekvenciu úročenia, každú dlžky $1/m$ z daného obdobia a úroková miera je $i^{(m)}/m$ za periódu. Budúcu hodnotu po T periódach vypočítame podľa vzorca:

$$FV_T = PV\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^T \tag{1.5}$$

Platná úroková miera i_{eff} za jednotku času sa však líši od nominálnej. Efektívna úroková miera je ročná miera, ktorá pri področnej sadzbe $i^{(m)}$ úročenej m-krát ročne dáva rovnakú splatnú čiastku. Platí medzi nimi vzťah:

$$1 + i_{\text{eff}} = \left(1 + \tfrac{i^{(m)}}{m}\right)^m.$$

1.2 Určujúce faktory úrokových mier

Úrokové miery, ako hodnoty peňazí, sú ovplyvňované hlavne trhovou ponukou a dopytom, pričom sú z časti kontrolované vládou alebo centrálnou bankou. Sadzby sa menia v súvislosti s ekonomickým prostredím, trhovým postavením, používanými finančnými inštrumentami a časom. Tržby sú väčšinou určené mierou výnosnosti, ktorá je definovaná vzťahom

$$\text{Miera výnosnosti} = \frac{\text{Konečná suma + Peňažné príjmy - Počiatočná suma}}{\text{Počiatočná suma}}$$

Každá investícia sa oceňuje s ohľadom na tržbu, riziko, infláciu a likviditu.

1.3 Rozklad úrokovej miery

Pri zohľadnení všetkych faktorov, ktoré ovplyvňujú nominálnu úrokovú sadzbu, môžeme túto mieru vyjadriť ako :

$$1 + r = (1 + r_0)(1 + r_{\text{inflation}})(1 + r_{\text{default}})(1 + r_{\text{liquidity}})(1 + r_{\text{maturity}}), \tag{1.6}$$

kde r_0 označuje bezrizikovú mieru, $r_{\text{inflation}}$ vyjadruje očakavanú mieru inflácie, r_{default} je riziko, že dlžník nevyplatí istinu, úrok alebo oba. $r_{\text{liquidity}}$ je prémia v prípade platobnej neschopnosti a r_{maturity} je prirážka za riziko vyvolané možnou zmenou úrokovej miery počas životnosti aktíva. Pre malé r približne platí

$$r = r_0 + r_{\text{inflation}} + r_{\text{default}} + r_{\text{liquidity}} + r_{\text{maturity}}.$$

V skutočnosti ale neexistuje bezriziková investícia. Pre zjednodušenie sa však vládne obligácie považujú za bezrizikové. V takomto prípade, výnos obsahuje očakávanú mieru inflácie, takže bezriziková miera s prémiou za infláciu je

$$(1 + r_0)(1 + r_{\text{inflation}}) - 1.$$

Ak r je nominálna úroková miera na depozit a $r_{\text{inflation}}$ je miera inflácie, potom skutočný výnos je niekedy vyjadrený na základe reálnej úrokovej sadzby, ktorá je vyjadrená vzťahom

$$1 + r = (1 + r_{\text{inflation}})(1 + r_{\text{real}}),$$

z toho plynie vyjadrenie pre r_{real}:

$$r_{\text{real}} = \frac{r - r_{\text{inflation}}}{1 + r_{\text{inflation}}}, \tag{1.7}$$

pre malé hodnoty komponentov ju môžeme aproximovať vyjadrením $r_{\text{real}} = r - r_{\text{inflation}}$. Ďalej nech r_{tax} je daň uložená na výnosovú mieru z depozita. Potom dostávame

$$1 + r(1 - r_{\text{tax}}) = (1 + r_{\text{inflation}})(1 + r_{\text{real}}). \tag{1.8}$$

1.4 Spojité úročenie

Predstava tohto úročenia pochádza z konceptu pre počet úročení blížiaci sa k nekonečnu. Predpokladáme nominálnu úrokovú mieru $i^{(\infty)} =: \delta$ (intenzita úročenia) za jednotku času. Budúcu hodnotu v čase T dostaneme ako :

$$FV_T = PV \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i^{(\infty)}}{m}\right)^{Tm} = PV e^{\delta T}. \tag{1.9}$$

Ak je investícia uskutočnená v čase $t > 0$ a je prezentovaná súčasnou hodnotou PV_t, potom

$$FV_T = PV_t e^{\delta(T-t)}. \tag{1.10}$$

Tu predpokladáme, že intenzita je konštantná. Pre premenlivú intenzitu použijeme vzťah

$$FV_T = PV_t \exp(\int_t^T \delta_s ds). \tag{1.11}$$

Analogicky vieme vyjadriť súčasnú hodnotu na základe budúcej hodnoty a časovo závislej intenzity $PV_t = FV_T \exp(-\int_t^T \delta_s ds)$. Funkcia $v(t,T) = \exp(-\int_t^T \delta_s ds)$ sa nazýva *diskontný faktor*.

2. Modely úrokových mier

Deriváty úrokových mier patria v súčasnosti medzi najviac obchodované, preto je potrebné vedieť ich správne oceniť. Sú to kontrakty, ktorých výplata úzko závisí práve na úrokovej miere, ktorá sa používa na jej diskontovanie. Faktorom, ktorý najviac ovplyvňuje výšku úrokových sadzieb je predovšetkým čas do splatnosti (maturity). Tento vzťah opisuje takzvaná časová štruktúra (term structure), inak nazývaná tiež výnosová krivka. Medzi najpoužívanejšie modely úrokových mier patria tie, ktoré sú dané predpisom nejakej stochastickej diferenciálnej rovnice. Väčšina teórie spracovanej v tejto časti pochádza z [1] a [7].

2.1 Jednofaktorové modely

Jedná sa o modely, kde ako jediný zdroj neistoty vystupuje premenná r, teda okamžitá úroková miera. Jedná sa o spojitý stochastický proces popísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr(t) = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW(t),$$

kde $\mu(r,t)$ označuje drift a $\sigma(r,t)$ volatilitu. Náhodnosť je zabezpečená difúznym členom dW, kde W vyjadruje Wienerov proces [2].

Definícia (Wienerov proces)**.** *Štandardný Wienerov proces* $\{W(t), t \geq 0\}$ *je spojitý stochastický proces spĺňujúci:*

- $W(0) = 0$ *s pravdepodobnosťou 1*
- $W(t)$ *má nezávislé prírastky s rozdelením* $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$ *pre* $0 \leq s < t$

2.1.1 Vašíčkov model

Predpokladom tohto modelu je, že okamžitá spotová sadzba vzhľadom k skutočnej miere sa odvíja z Ornstein-Uhlenbeckovho procesu s konštantnými koeficientami. Pre vhodné zvolenie tržnej ceny rizika môžeme predpokladať, že r opisuje spomínaný proces, teda je to ekvivalentné k vzťahu

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t), \qquad r(0) = r_0, \tag{2.1}$$

kde r_0, k, θ, σ sú kladné konštanty. Integráciou tak získame pre každé $s \leq t$

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u). \tag{2.2}$$

V tomto modele má $r(t)$ normálne rozdelenie. Hlavným nedostatkom tohoto modelu je fakt, že miera $r(t)$ môže nadobudnúť záporné hodnoty s kladnou pravdepodobnosťou v každom čase t. Avšak tvar Gaussovej hustoty nie je dosiahnuteľný, ak by sme predpokladali iné rozdelenie. Ďalšou nevýhodou Vašíčkovho modelu je aj nezávislosť volatility na hodnote úrokovej miery.

2.1.2 Dothanov model

Dothanov model vychádza z bezdriftového geometrického Brownovho pohybu. Stochastická diferenciálna rovnica pre krátkodobú úrokovú mieru je:

$$dr(t) = \sigma r(t) dW(t), \qquad r(0) = r_0,$$

kde r_0 a σ sú kladné konštanty. V tomto modele sa predpokladá konštantná trhová cena rizika, teda priamo môžeme predpokladať:

$$dr(t) = ar(t)dt + \sigma r(t) dW(t), \tag{2.3}$$

kde a je nejaké reálne číslo. Zintegrovaním 2.3 dostávame pre každé $s \leq t$:

$$r(t) = r(s) \exp\{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s) + \sigma(W(t) - W(s))\}. \tag{2.4}$$

Úroková miera $r(t)$ má lognormálne rozdelenie. V takom prípade bude $r(t)$ nadobúdať len kladné hodnoty v každom čase t, čím sa odstraňuje základný problém Vašíčkovho modelu.

2.1.3 Model Cox, Ingersoll a Ross (CIR)

Cox, Ingersoll a Ross zaviedli v koeficiente rozptylu Vašíčkovho modelu "odmocninu". Odstránili problém v zápornosti úrokovej miery, a taktiež ich model mal výhodnú analytickú tvárnosť. Kvôli tomu sa stal na mnoho rokov merítkom pri modelovaní úrokovej miery:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \qquad r(0) = r_0, \tag{2.5}$$

kde r_0, θ, k a σ sú kladné konštanty. Na zabezpečenie toho, aby r bolo kladné, je predpísaná podmienka pre konštanty: $2k\theta > \sigma^2$. Tento model má (necentrálne) χ^2 rozdelenie.

2.1.4 Ďalšie modely

Exponenciálny Vašíčkov model

Ak chceme dosiahnúť model úrokovej miery s lognormálnym rozdelením alternatívnym k Dothanovmu modelu, uvedieme predpoklad, že $\log r$ opisuje Ornstein-Uhlenbeckov proces y. y je definované predpisom:

$$dy(t) = [\theta - ay(t)]dt + \sigma dW(t), \qquad y(0) = y_0,$$

kde θ, a, σ sú kladné konštanty a y_0 je reálne číslo. Následne položíme $r(t) = \exp(y(t))$, čím dostaneme dynamiku v čase:

$$dr(t) = r(t)[\theta + \frac{\sigma^2}{2} - a \ln r(t)]dt + \sigma r(t)dW(t). \tag{2.6}$$

Ak je okamžitá miera definovaná ako exponenciála procesu, ktorý je ekvivalentným k Vašíčkovmu, nazveme tento model exponenciálnym Vašíčkovým modelom. Explicitne dostaneme vyjadrenie miery $r(t)$ pre každé $s \leq t$:

$$r(t) = \exp\{\ln r(s)e^{-a(t-s)} + \frac{\theta}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u)\}. \tag{2.7}$$

Teda $r(t)$ má lognormálne rozdelenie.

Hull-Whitovo rozšírenie Vašíčkovho modelu

Keďže bolo potrebné presné vyrovnanie získanej výnosovej krivky, Hull a White zaviedli vo Vašíčkovom modele parametre, ktoré sa s časom menili. Toto rozšírenie je historicky najdôležitejším a dodnes sa používa v návrhoch risk-managementu. Navrhli všeobecný model, ktorý je taktiež schopný vyrovnať danú časovú štruktúru volatility.

$$dr(t) = [\vartheta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t), \tag{2.8}$$

kde ϑ, a a σ sú deterministické funkcie času. Avšak pri aplikácii na konkrétnu trhovú situáciu môžu nastať problémy. Preto sa venujeme rozšíreniu, kde iba 1 parameter (Vašíčkova θ) je deterministickou funkciou času:

$$dr(t) = [\vartheta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t),$$

kde a, σ sú kladné konštanty a ϑ presne vyhladzuje trhovú časovú štruktúru. Úpravou získame vyjadrenie pre $r(t)$

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}\vartheta(u)du + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u). \tag{2.9}$$

Takto skonštruovaná $r(t)$ má pre každé t normálne rozdelenie. Vďaka Gaussovej distribúcii je možné pre odvodenie formulí a pre konštrukciu numerických procedúr na ocenenie použiť veľký rozsah derivátových položiek. Ale jednofaktorová formulácia a tiež možnosť záporných sadzieb robia tento model ťažko aplikovateľným na konkrétne problémy oceňovania.

Model Black-Karasinski

Black a Karasinski predpokladali, že proces okamžitej úrokovej miery sa neodvíja priamo z Ornstein-Uhlenbeckovho procesu, ale z jeho exponenciály. Taktiež koeficienty tohto procesu sú časovo závislé. Teda $\ln r(t)$ dáva:

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - a(t)\ln(r(t))]dt + \sigma(t)dW(t), \qquad r(0) = r_0,$$

kde r_0 je kladné, θ, a a σ sú deterministické funkcie času, ktoré sa volia tak, aby presne vyrovnali vstupnú časovú štruktúru. Podobne ako v predošlom modele, prejdeme k rozšíreniu, ktoré predpokladá len jednu funkciu času.

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - a\ln(r(t))]dt + \sigma dW(t), \qquad r(0) = r_0, \tag{2.10}$$

ak je θ jedinou časovo závislou funkciou, presne vyhladzujeme aktuálnu časovú štruktúru. Ďalšie parametre vyjadrujú tak, ako aj v predošlých modeloch:

a - určuje mieru "rýchlosti", v ktorej sa $\ln(r(t))$ blíži dlhodobej hodnote,
σ - štandardná odchýlka $\frac{dr(t)}{r(t)}$.

Veta 1 (Itôovo lemma). *Nech $\{X(t)\}$ je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice a $g(t,x)$ je deterministická funkcia, ktorá je spojite diferencovateľná podľa t a dvakrát spojite diferencovateľná podľa x. Potom stochastický proces $\{g(t,X(t))\}$je riešením*

$$dg(t,X) = [\tfrac{\partial g(t,X)}{\partial t} + \alpha(t,X)\tfrac{\partial g(t,X)}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,X)\tfrac{\partial^2 g(t,X)}{\partial x^2}]dt + \sigma(t,X)\tfrac{\partial g(t,X)}{\partial x}dW$$

Podľa Itôovho lemma [10] dostávame z 2.10

$$dr(t) = r(t)[\theta(t) + \tfrac{\sigma^2}{2} - a\ln r(t)]dt + \sigma r(t)dW(t).$$

Explicitne teda pre každé $s \leq t$ máme:

$$r(t) = \exp\{\ln r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du + \sigma\int_s^t e^{-a(t-u)}\}dW(u), \tag{2.11}$$

r má lognormálne rozdelenie.

CIR++

Dynamika úrokovej miery je daná predpisom:

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t), \qquad x(0) = x_0$$
$$r(t) = x(t) + \varphi(t).$$

Predpokladáme, že časová štruktúra diskontných faktorov získaná z trhovej skutočnosti je daná dostatočne hladkou funkciou $t \mapsto P^M(0,t)$ Presné vyrovnanie

počiatočnej časovej štruktúry týchto faktorov získame pri
$\varphi(t) = \varphi^{CIR}(t;\alpha), \qquad$ kde $\alpha = (k, \theta, \sigma)$ je vektor.
$\varphi^{CIR}(t;\alpha) = f^M(0,t) - f^{CIR}(0,t;\alpha)$, kde $f^M(0,t)$ označuje tržnú forwardovú sadzbu v čase 0 a s maturitou t, ktorá je pridružená k cene dlhopisu $P^M(0,t)$ pre $t \geq 0$. Napríklad $f^M(0,t) = -\frac{\partial \ln P^M(0,t}{\partial t}$. Za $f^{CIR}(0,t;\alpha)$ dosadíme výraz $\frac{2k\theta(\exp\{th\}-1)}{2h+(k+h)(\exp\{th\}-1)} + x_0 \frac{4h^2 \exp\{th\}}{[2h+(k+h)(\exp\{th\}-1)]^2}$, kde $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$.

2.2 Dvojfaktorové modely

Ako už bolo spomenuté, znalosť okamžitej sadzby a jej distribučných vlastností postačuje na odvodenie ceny dlhopisu podľa známeho vzťahu

$$P(t,T) = E_t[\exp\{-\int_t^T r(s)ds\}].$$

Podľa týchto cien v čase t vieme potom zostrojiť krivku úrokových mier v tom danom čase t. Z toho jednoznačne plynie, že tvar krivky je určený vývojom r v čase. Niekedy je však potrebné zvýšiť precíznosť a zaoberať sa modelmi, ktoré sa viac približujú reálnemu stavu. Toto sa dá dosiahnúť použitím multifaktorových modelov, zvlášť dvojfaktorových.
Predpokladajme hypotetickú dvojfaktorovú verziu Gaussovho Vašíčkovho modelu danú predpisom:

$$\begin{aligned} r(t) &= x(t) + y(t), \\ dx(t) &= k_x(\theta_x - x(t))dt + \sigma_x dW_1(t), \\ dy(t) &= k_y(\theta_y - y(t))dt + \sigma_y dW_2(t), \end{aligned}$$

s korelovanými zdrojmi náhodnosti $dW_1 dW_2 = \rho dt$. Podobne ako pri jednofaktorovom modele, aj v tomto prípade je cena dlhopisu afinnou funkciou, tentokrát však dvoch faktorov: $P(t,T) = A(t,T)\exp\{-B^x(t,T)x(t) - B^y(t,T)y(t)\}$.
Pri výbere počtu faktorov zohľadňujeme numerickú efektívnosť pri použití pre daný prípad v praxi, schopnosť popísať reálne vzory a tiež, aby model dostatočne vyhladil tržné dáta.
Pri voľbe dvojfaktorového modelu, vo všeobecnosti uvažujeme model tvaru

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t), \tag{2.12}$$

kde $\varphi(t)$ je deterministické posunutie, ktoré je v predpise pridané pre presné vyrovnanie počiatočnej krivky.

2.2.1 Gaussov model G2++

Predpokladom tohto modelu je proces daný sumou dvoch korelovaných Gaussových procesov a deterministickej funkcie $\varphi(t)$. Aj napriek možnosti záporných sadzieb je tento model v praxi veľmi užitočný. Dôsledkom Gaussovej distribúcie spolu s analytickým vyjadrením pre dlhopisy s nulovým kupónom, je efektívna procedúra pre ocenenie akejkoľvek výplaty. Tento model umožňuje taktiež ľahkú reprezentáciu krivky,čo je najpodstatnejším dôvodom využitia tohto modelu.
Pri modelovaní úrokovej krivky predpokladáme dynamiku okamžitej úrokovej miery:

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t), \qquad r(0) = r_0, \tag{2.13}$$

kde procesy $\{x(t) : t \geq)\}$ a $\{y(t) : t \geq)\}$ sú dané nasledovne:

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.14}$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), \qquad y(0) = y_0, \tag{2.15}$$

kde (W_1, W_2) je 2-dimenzionálny Brownov pohyb s koreláciou ρ:
$dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$. Konštanty r_0, a, b, σ a η sú kladné, naviac musí platiť $-1 \leq \rho \leq 1$.
Zintegrovaním 2.14 a 2.15, následným dosadením do 2.13 dostávame vyjadrenie $r(t)$ pre $s \leq t$:

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \varphi(t), \tag{2.16}$$

$r(t)$ má normálne rozdelenie.

2.2.2 Rozširený CIR model - CIR2++

Vychádza z CIR modelu. Je tvorený sumou dvoch nezávislých odmocnín procesu a deterministickou funkciou. Procesy majú tvar:

$$dx(t) = k_1(\theta_1 - x(t))dt + \sigma_1\sqrt{x(t)}dW_1(t), \tag{2.17}$$

$$dy(t) = k_2(\theta_2 - y(t))dt + \sigma_2\sqrt{y(t)}dW_2(t). \tag{2.18}$$

W_1 a W_2 sú nezávislé Brownove pohyby, k_1, θ_1, σ_1, k_2, θ_2 a σ_2 sú kladné konštanty, ktoré splňajú podmienky $2k_1\theta_1 > \sigma_1^2$ a $2k_2\theta_2 > \sigma_2^2$. Úroková sadzba je v tomto modele definovaná ako

$$\xi_t^\alpha := x(t) + y(t), \tag{2.19}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 = (k_1, \theta_1, \sigma_1)$ a $\alpha_2 = (k_2, \theta_2, \sigma_2)$.

Model	Dynamika	$r > 0$	$r \sim$
V	$dr(t) = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW(t)$	NIE	$\mathcal{N}$
D	$dr(t) = ar(t)dt + \sigma r(t)dW(t)$	ÁNO	NC χ^2
CIR	$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$	ÁNO	L$\mathcal{N}$
EV	$dr(t) = r(t)[\theta + \frac{\sigma^2}{2} - a \ln r(t)]dt + \sigma r(t)dW(t)$	ÁNO	L$\mathcal{N}$
HW	$dr(t) = [\vartheta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t)$	NIE	$\mathcal{N}$
BK	$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - a(t)\ln(r(t))]dt + \sigma(t)dW(t)$	ÁNO	$L\mathcal{N}$

Tabuľka 2.1: Jednofaktorové modely úrokových mier

3. Vnútorná politika bánk

3.1 Ekonomické teórie determinácie úrokovej sadzby

- *Klasická teória*
  Rovnovážna úroková sadzba sa nachádza v bode rovnováhy medzi dopytom a ponukou. Stranu dopytu reprezentuje hlavne dopyt podnikov po investičnom kapitále. Na druhej strane, ponuku predstavujú predovšetkým úspory domácností, spoločností a vlád. Táto teória avšak neberie ohľad na niektoré zložky reálnej ekonomiky ako napríklad funkciu obchodnej banky, ktorá poskytuje možnosť čerpania úveru verejnosťou.

- *Teória preferencie likvidity*
  Základom pre tvorbu rovnovážnej úrokovej miery je vzájomné pôsobenie dopytu po likvidite a ponuky peňazí. Celkový dopyt je určený dôvodmi držby peňazí a reálnym príjmom. Ponuka je regulovaná a celkovo kontrolovaná vládou, prípadne centrálnou bankou. Z toho plynie, že vplyv vlády je vysoký a v tejto teórii nie je možné ho vylúčit, aj napriek faktu, že je určená na kratšie obdobia.

- *Teória racionálneho očakávania*
  Pracuje s údajmi, ktoré ovplyvňuje situácia na peňažných a kapitálových trhoch. Táto teória obsahuje dôležité predpoklady ako napríklad:

  – efektívny trh, kde sadzby zohľadňujú všetky relevantné informácie
  – zmeny úrokových sadzieb zapríčiňujú výlučne nepredvídateľné fakty
  – korelácia medzi návratnosťou v časových obdobiach bezprostredne po sebe nasledujúcich je nulová
  – neexistujúca možnosť tvorby nadnormálnej návratnosti
  – očakávania, ktoré sa týkajú výšky úrokovej sadzby su racionálne formované a využívané efektívnym spôsobom

3.2 Prvky ovplyvňujúce úrokovú sadzbu

Pri určovaní výšky úrokovej sadzby, vychádzajú banky z vývoja základnej sadzby, ktorú stanovuje centrálna banka. Banka má možnosť zmeny sadzieb vzhľadom k aktuálnej trhovej situácii. Úrokové miery týkajúce sa úverov sa zvyčajne pohybujú v hodnotách nad základnou sadzbou, a naopak úroky , ktoré banka vyplacá klientovi pri vkladových produktoch sú v porovnaní so základnou sadzbou nižšie. Úroková miera pre jednotlivé bankové produkty sa odvíja od istých faktorov.

Cena prevodu peňazí

Považuje sa za najlepšiu techniku pri určení ziskovosti. Je základom vo väčšine finančných inštitúcií. Používa sa na analýzu nákladov a výnosov marže, týkajúcej sa oceňovania zdrojov, a tiež pri riadení poskytovania produktov bánk. Podľa určitých podmienok je touto metódou stanovená vnútorná miera, na základe ktorej je možné porovnávať navzájom jednotlivé pracoviská banky a tiež bankové produkty. Inými slovami, je to vnútrobankové ocenenie konkretného aktíva podľa typu, splatnosti a meny, teda maximálna sadzba, ktorou je schopná banka refinancovať sa z trhu, v prípade nedostatku lividity.

Financovanie rozšírenia

Predstavuje dodatočný výnos, ktorý požaduje investor. Slúži na kompenzáciu pri držaní rizikových aktív, ktorých speňaženie je zložitejšie. Táto zložka zvyšuje náklady na strane klienta.

Rizikové náklady

Súbor tvorený ratingovými prirážkami závislými na type úveru a ratingovej skupine v rámci banky. Čím nižšia ratingová trieda, tým sa zvyšuje prirážka. Táto položka taktiež navyšuje klientskú úrokovú sadzbu.

Marža

Čistá úroková marža je určená rozdielom úrokových výnosov a nákladov, ktoré sú následne vydelené priemernou výškou aktív, ktoré banka úročí. Vzhľadom na fakt, že úroky, ktoré banka vypláca (týkajú sa vkladových produktov) sú značne nižšie než úroky bankou prijímané, je zrejmé, že čisté úrokové výnosy banky sú vyššie a tým rastie aj úroková marža.

3.3 Prvky ovplyvňujúce výšku poskytnutého úveru

Veľkú časť peňazí banky poskytujú vo forme podnikateľského úveru. Ten je prístupný ako právnickým, tak i fyzickým osobám. V tomto texte sa zameriame na úver poskytovaný firmám. V prípade, že spoločnosť má potrebu sa rozvýjať a je predpoklad, že v budúcnosti bude prijímať dostatočné množstvo zakázok, má možnosť požiadať o podnikateľský úver. Tento úver je vhodný práve v situáciach, kedy podnikateľ musí zafinancovať svoje obchodné aktivity. Pri určovaní výšky možného poskytnutého úveru hrajú významnú úlohu rôzne faktory. Najdôležitejšími sú:

- rating spoločnosti
- miera zabezpečenia úveru
- záväznosť resp. nezáväznosť úveru

Celková úroková sadzba sa následne vypočíta ako súčet referenčnej sadzby pre úver a marže.

Rating spoločnosti

Ratingom spoločnosti rozumieme stupeň ohodnotenia pri posúdení jej dôveryhodnosti. Môže byť stanovený interne samotnou bankou, alebo externe a to ratingovou agentúrou. Na základne tohto ohodnotenia je následne spoločnosť zaradená do zodpovedajúcej skupiny, od ktorej sa odvíja úroková sadzba. Rating vyjadruje budúci stav spoločnosti vzhľadom k dlhu, preto metóda jeho určenia vychádza práve z pohľadu do budúcna. Zohľadňuje pritom 2 druhy rizika. Riziko vyjadrujúce ochotu splatiť dlh (politické) a riziko odrážajúce schopnosť splatiť dlh (ekonomické). Najspoľahlivejším ocenením je hodnotenie medzinárodnými ratingovými spoločnosťami, ktoré sú nezávislé a majú analytickú kapacitu, ktorá je postačujúca pre správne a kvalitné posúdenie subjektov. Všeobecne platí, že čím horší rating zodpovedá danej firme, tým vyššie je riziko defaultu a tým stúpa aj úroková sadzba. Medzi najvplyvnejšie agentúry patria: Moody's, Standard & Poor's, Fitch-IBCA, Duff & Phelps.

stupeň ratingu Moody's	stupeň ratingu S & P	stupeň úverovej kvality
Aaa	AAA	1
Aa1 až Aa3	AA+ až AA-	2
A1 až A3	A+ až A-	3
Baa1 až Baa3	BBB+ až BBB-	4
Ba1 až Ba3	BB+ až BB-	5
B1 až B3	B+ až B-	6
Caa1 až Ca	CCC+ až C	7
C	D	zlyhanie (default)

Tabuľka 3.1: Rating agentúr

Zabezpečenie úveru

Zníženie sadzby môže podnitakeľ dosiahnúť tiež dobrým zabezpečením a to hnuteľným prípadne nehnuteľným majetkom, zmenkou alebo dostatočným vkladom. Zaistenie majetkom má za dôsledok výrazné zníženie úrokovej miery z toho dôvodu, že ručenie nehnuteľnosťou je silné a banka tým znižuje riziko. Zmyslom zabezpečenia úveru je zabrániť stratovosti banky v prípade neschopnosti klienta splatiť dlh. Povoľuje banke uplatnenie nárokov voči dlžníkovi alebo inej osobe a tým nahradiť pohľadávku za úver alebo úroky. Zaistenie sa používa prevažne pri čerpaní úveru s väčším objemom peňazí. Pri zabezpečení sa zvyšuje pravdepodobnosť splatenia dlžnej čiastky a tým klesá riziko zlyhania, teda banka môže poskytnúť nižšie sadzby.

Úver na záväznej báze

Pri obchodovaní banka prepláca všetky platby do toho okamihu, kým je zostatok na účte kreditný. Akonáhle nastane stav, že nie je dostatok prostriedkov, automaticky je poskytnutý úver, tzn. účet prechádza do debetu, ktorý značí určitú vopred stanovenú sumu. Táto hodnota sa nazýva úverový rámec. Pri čerpaní pôžičiek, vznikajú banke náklady spojené s tým, že aj prostriedky, ktoré sú nevyužívané, musí držať v likvidnej forme. Záväznost v oblasti bankových úverov znamená, že okrem klasickej sadzby sa počíta aj úroková provízia. Klient teda zaplatí netto úrokovú sadzbu, ktorá sa odvýja z čerpanej čiastky úverového rámca, a taktiež takzvanú pohotovostnú províziu, ktorá predstavuje rozdiel medzi zjednaným úverovým rámcom a skutočne čerpaným úverom, teda prémia z nevyužitej čiastky.

4. Úrokové modely v praxi

Úrokové sadzby sa v chovaní vyznačujú určitými špecifickými vlastnosťami:

- sadzby sa pohybujú v istom rozmedzí. To znamená, že v praxi hodnota úrokovej miery neklesne pod nulu a nenadobúda hodnoty blížiace sa nekonečnu.
- mean reversion - sadzby sa v čase tendenčne vracajú k rovnovážnej hodnote (dlhodobý priemer).

4.1 Odhady parametrov

Informácie v tejto sekcii sú čerpané hlavne z [5] a [6]. Pri modelovaní úrokových mier sa využívajú spojité stochastické procesy, najčastejšie Wienerov proces ako súčasť difúzneho procesu 4.1:

$$dr(t) = \mu(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dW(t). \tag{4.1}$$

Časť označená $\mu(r(t), t)$ predstavuje drift, $\sigma(r(t), t)$ je stochastická zložka a $W(t)$ je Wienerov proces.
Základným modelom, ktorý ma vlastnosť mean reversion je model CKLS (Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders). Je vyjadrený vzťahom 4.2:

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma r(t)^{\gamma} dW(t), t \geq 0, \tag{4.2}$$

μ určuje dlhodobý priemer, teda hodnotu, ku ktorej sa sadzby vracajú na základe vlastnosti mean reversion, α predstavuje rýchlosť tohto návratu a σ je konštantný difúzny koeficient. Parameter γ sa neodhaduje. Volí sa vopred a udáva mieru vplyvu hodnoty $r(t)$ na stochastickú zložku procesu. Pri zvolení nulovej γ, dostaneme model, kde je stochastická časť nezávislá na člene $r(t)$. Nazývame ho Vašíčkov model. Pri voľbe $\gamma = 1/2$, dostávame model Cox-Ingersoll-Ross, v ktorom má stochastická zložka tvar $\sigma\sqrt{r(t)}$.
V tejto kapitole sa budeme ďalej zaoberať odhadmi parametrov základných jednofaktorových modelov úrokových mier. Prevedieme diskretizačnú metódu a následne metódu na odhad parametrov. Diskretizácia pre rovnicu 4.2 je v tvare:

$$r(t + \Delta t) = a + br(t) + \sigma r(t)^{\gamma}\sqrt{\Delta t}\varepsilon(t),$$

kde $a = \alpha\mu\Delta t$, $b = 1 - \alpha\Delta t$ a $\varepsilon(t) \sim N(0, 1)$

4.1.1 Metóda najmenších štvorcov

Metóda OLS (Ordinary Least Squares) je založená na odhadoch odvodených pomocou minimalizácie sumy kvadrátov jednotlivých odchyliek. Predpokladajme model:

$$y_t = b_0 + b_1 x_t + \varepsilon_t, \tag{4.3}$$

kde dáta y a x sú dostupné pre T časových periód, b_0 a b_1 sú nepozorovateľné parametre, ktoré chceme odhadnúť, ε je označenie odchylky. Odhady touto metódou získame voľbou b_0 a b_1 tak, aby minimalizovali

$$\sum_{t=1}^{T}(y_t - b_0 - b_1 x_t)^2. \tag{4.4}$$

Zderivovaním predošlého vzťahu podľa b_0 a b_1 a následným položením nule (nutná podmienka pre minimum) dostávame:

$$\begin{aligned} -2\textstyle\sum_{t=1}^{T}(y_t - b_0 - b_1 x_t) &= 0 \\ -2\textstyle\sum_{t=1}^{T}[(y_t - b_0 - b_1 x_t)x_t] &= 0\ . \end{aligned}$$

Úpravou získame odhady parametrov:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{T\sum_{t=1}^{T} x_t^2 - (\sum_{t=1}^{T} x_t)^2}[T\textstyle\sum_{t=1}^{T} x_t y_t - \sum_{t=1}^{T} x_t \sum_{t=1}^{T} y_t] \\ b_0 &= \frac{1}{T}[\textstyle\sum_{t=1}^{T} y_t - b_1 \sum_{t=1}^{T} x_t]. \end{aligned}$$

4.1.2 Metóda maximálnej vierohodnosti

Táto metóda je prebratá z [8]. Pre odvodenie parametrov predpokladajme všeobecný tvar spojitého procesu vyjadrený stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr(t) = \mu(r(t), \theta)dt + \sigma(r(t), \theta)dW(t),$$

kde $W(t)$ je Wienerov proces. Postup spočíva v nahradení tohto modelu jeho diskretizáciou. Model úrokovej miery ma po diskretizácii tvar:

$$r(t) = r(t-1) + \mu(r(t-1), \theta) + \sigma(r(t-1), \theta)\varepsilon(t), \tag{4.5}$$

kde $\varepsilon(t)$ je biely šum [9].

Definícia (Biely šum). *Postupnosť náhodných veličín $(X_1, \ldots, X_n)^T$ nazveme biely šum, pokiaľ platí $EX_t = 0$ pre všetky t a $r(k) = I(k = 0)\,\mathrm{var}(X_1)$, kde $r(k)$ je autokovariančná funkcia postupnosti (ktorá udáva, ako veľmi sú závislé dve zložky náhodnej postupnosti, ktoré odpovedajú časom posunutým o k jednotiek).*

Následne sa aplikuje metóda na odhad parametrov na aproximovaný model 4.5. Odhad touto metódou je definovaný predpisom:

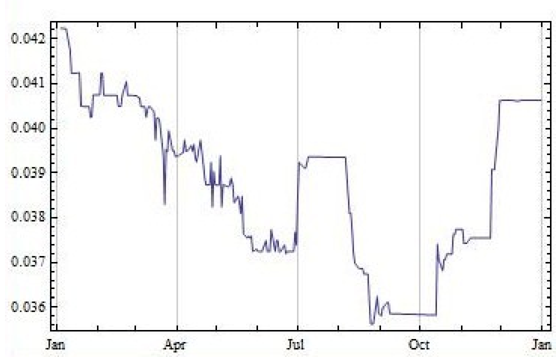
$$\theta = \mathrm{ArgMax}_\theta \textstyle\sum_{t=1}^{T} \{-\frac{1}{2} \log \sigma^2(r(t-1), \theta) - \frac{1}{2} \frac{[r(t) - \mu(r(t-1), \theta)]^2}{\sigma^2(r(t-1), \theta)}\}$$

4.1.3 Praktický odhad parametrov

Pre najlepšie odhadnutie je potrebné pracovať s údajmi, ktoré čo najlepšie popisujú skutočnosť:

- *Statické metódy* - parametre sú odhadované z aktuálnych tržných dát (aktuálny tvar výnosovej krivky)
- *Dynamické metódy* - parametre sú odhadované z historických údajov (historické hodnoty úrokových mier)

V tejto práci budeme používať dynamickú metódu, pretože sa jedná o modely, kde sa na základe pozorovateľných hodnôt dajú jednoducho získať vzorce pre parametrické odhady. Pri Vašíčkovom modele aplikujeme metódu najmenších štvorcov, pri ostatných využijeme metódu maximálnej vierohodnosti. Na numerické výpočty využijeme matematický software Wolfram Mathematica. Odhady prevedieme na denných výnosoch štátnych dlhopisov za rok 2010. Časový rad, ktorý sme prevzali z [4], tvorí vstup do programu, celkovo obsahuje 249 pozorovaní. Ide o dáta, udané v percentách, v časovom rozpätí od 4. januára 2010 do 31. decembra 2010. Tento rad je možné nájsť v prílohe.



Obr. 4.1: Denné výnosy štátnych dlhopisov za rok 2010

Vašíčkov model

Dynamika úrokovej miery je daná predpisom: $dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)$. Aplikujeme diskretizáciu, po ktorej dostaneme tvar:

$$r(t+1) - r(t) = k[\theta - r(t)] + \sigma\varepsilon(t),$$

kde $\varepsilon(t)$ má normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a jednotkovým rozptylom. Všetky parametre musia splňať pozitivitu (nesmú nadobúdať nekladné hodnoty). Pre výpočty upravíme rovnicu a reparametrizujeme ju:

$$r(t+1) = \alpha + \beta r(t) + \sigma\varepsilon(t),$$

$\alpha = k\theta$ a $\beta = 1 - k$. Po použití metódy najmenších štvorcov dostaneme hodnoty parametrov $\alpha = 0.000876067$ a $\beta = 0.977209$. Odhadneme aj hodnotu σ, udávajúcu rozptyl chyby. Z týchto výsledkov vyjadríme parametre Vašíčkovho modelu:

$$k = 0.0227909, \qquad \theta = 0.0384393 \qquad \text{a} \qquad \sigma = 0.000319674. \tag{4.6}$$

Dothanov model

Tento model je popísaný rovnicou: $dr(t) = \alpha r(t) + \sigma dW(t)$.
Analogicky ako v predošlom prípade použijeme diskretizáciu:

$$r(t+1) = (1+\alpha)r(t) + \sigma r(t)\varepsilon(t).$$

Predpokladom modelu je nezápornosť parametru σ a náležitost parametru α do reálnych čísel. Použijeme metódu maximálnej vierohodnosti, kde nahradíme členy $\mu(\theta, r(t))$ a $\sigma(\theta, r(t))$ konkretnými predpismi pre tento model, teda $\mu(\theta, r(t)) = (1+\alpha)r(t-1)$ a $\sigma(\theta, r(t)) = \sigma r(t-1)$. Dostaneme parametre modelu s hodnotami:

$$\alpha = -0.00012151 \qquad \text{a} \qquad \sigma = 0.00836305. \tag{4.7}$$

Cox-Ingersoll-Rossov model

Model definovaný vzťahom $dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$. Po diskretizácii a reparametrizácii máme predpis v tvare:

$$r(t+1) = \alpha + (1 + \beta r(t)) + \sigma\sqrt{r(t)}\varepsilon(t),$$

$\alpha = k\theta$ a $\beta = 1 - k$. V tomto prípade platí $\mu(\theta, r(t)) = \alpha + (1+\beta)r(t-1)$ a $\sigma(\theta, r(t)) = \sigma\sqrt{r(t-1)}$. Po použití metódy maximálnej vierohodnosti získame hodnoty $\alpha = 0.000867096$ a $\beta = 0.977441$. Obdobne ako vo Vašíčkovom modele odhadneme aj hodnotu σ a dopočítame parametre modelu:

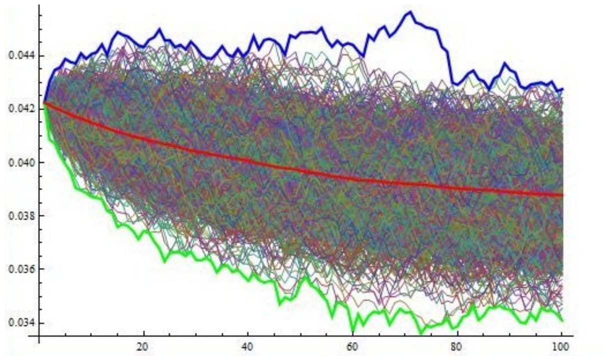
$$k = 0.0225592, \qquad \theta = 0.0384364 \qquad \text{a} \qquad \sigma = 0.00162519. \tag{4.8}$$

4.2 Simulácie modelov

V tejto časti sa budeme zaoberať odhadom parametrov simulacií. Najprv použijeme odhadnuté parametre jednofaktorových modelov, pomocou ktorých nasimulujeme časové rady. Metódou na odhadovanie potom zistíme parametre každej simulácie. Presný postup sa nachádza v prílohe tejto práce.

Vašíčkov model

V prvej časti tejto kapitoli sme vypočítali hodnoty Vašíčkovho modelu $k = 0,0227909, \theta = 0,0384393$ a $\sigma = 0,000319674$. Podľa diskretizovaného predpisu modelu $r(t+1) = r(t) + k[\theta - r(t)] + \sigma\varepsilon(t)$, nasimulujeme časové rady.



Obr. 4.2: Simulácia Vašíčkovho modelu

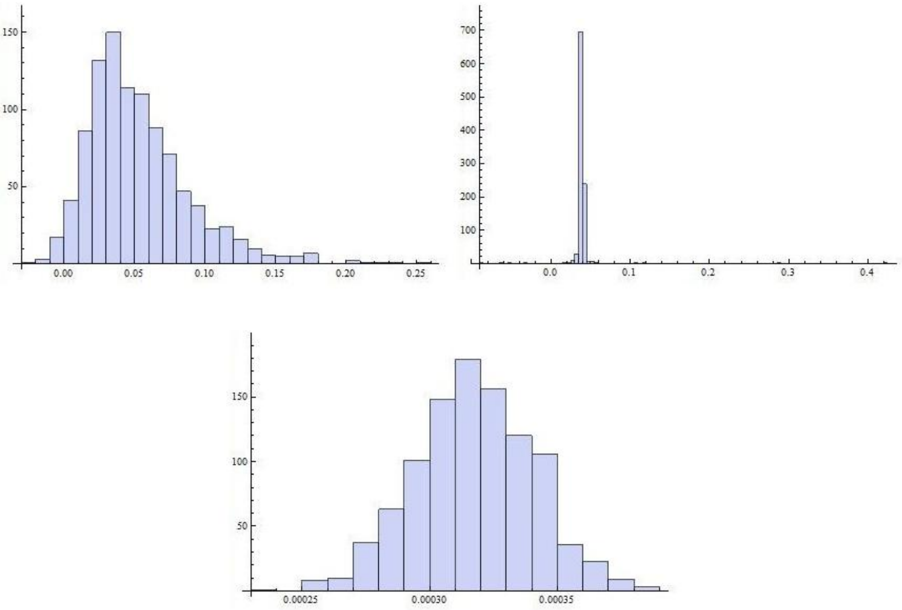
V grafe sú znázornené maximálne, minimálne a priemerné hodnoty v čase. Je zrejmé, že tento model má klesajúcu tendenciu, čo je dôvodom, že sadzby môžu nadobúdať záporné hodnoty v istom časovom okamžiku. To je v praxi nereálne, preto je tento model určený predovšetkým pre teoretické skúmanie. Avšak pre oceňovanie úrokových derivátov existujú explicitné vyjadrenia.

Pre parametre modelu určíme niektoré zo základných popisných štatistík. Patria medzi ne priemer, medián (stredný kvartil) a rozptyl. Spočítame taktiež interval spoľahlivosti, ktorý určuje pokrytie odhadu na hladine 0,05.

	k	θ	σ
Priemer	0.0532543	0.0392543	0.000317446
Median	0.0460751	0.0391037	0.000317109
Rozptyl	0.00136771	0.000267227	$5.36576 * 10^{-10}$
Int. spoľ.	(0.0509594, 0.0555493)	(0.0382399, 0.0402687)	(0.000316008, 0.000318883)

Tabuľka 4.1: Popisné štatistiky parametrov Vašíčkovho modelu

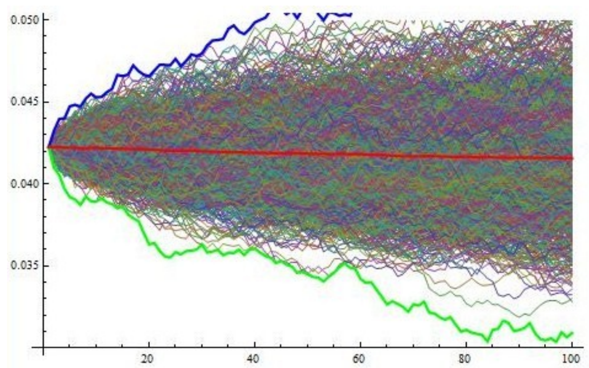
Hodnoty parametru k kolísajú najviac. To je zrejmé ako z histogramu, tak i z rozptylu, ktorý je v porovnaní s ostatnými parametrami najvyšší. Tvar histogramu sa podobá hustote χ^2 rozdelenia, ktoré sa so zvyšujúcim stupňom voľnosti blíži k normálnemu rozdeleniu. Pre parameter θ platí, že aj napriek nízkemu rozptylu existujú hodnoty výrazne odlišné od priemeru. To spôsobuje vysokú špicatosť. Medián a priemer sú približne rovnaké a pri zanedbaní odľahlých hodnôt môžeme skonštatovať, že tento parameter má približne normálne rozdelenie. Z histogramu pre parameter σ vidíme, že keď ho porovnáme s Gaussovou krivkou, sú si podobné. Z toho môžeme usúdiť, že σ má približne normálne rozdelenie.



Obr. 4.3: Histogramy parametrov k, θ a σ

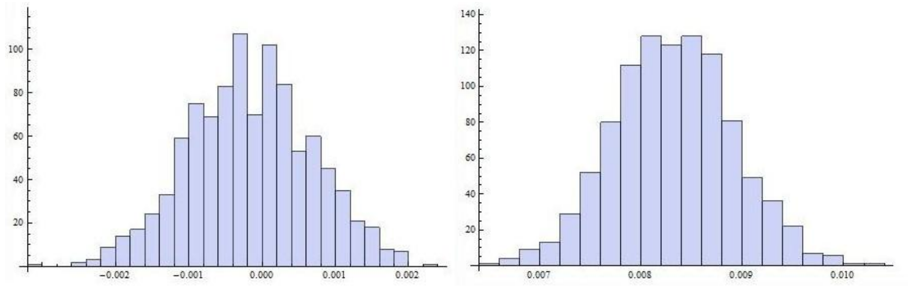
Dothanov model

Použijeme parametre 4.7, teda $\alpha = -0,00012151$ a $\sigma = 0,00836305$. Nasimulujeme vývoje výnosov podľa predpisu $r(t+1) = (1+\alpha)r(t) + \sigma r(t)\varepsilon(t)$. Následne z nich odhadneme parametre metódou maximalnej vierohodnosti. Z grafu vidíme,



Obr. 4.4: Simulácia Dothanovho modelu

že pri tomto modele majú sadzby ako klesajúci, tak i rastúci tvar. Tento rozdiel oproti Vašíčkovmu modelu zapríčinilo zahrnutie člena regresie do stochastickej zložky. Distribúcia v Dothanovom modele nám zabezpečuje kladnosť všetkých hodnôt v čase. Tým sa odstraňuje nedostatok Vašíčkovho modelu. Z histogramu vidíme, že hodnoty oboch parametrov sa pohybujú v približne symetrickom rozhraní okolo mediánu, či strednej hodnoty. Takýto tvar je s porovnaním s Gaussovou krivkou, popisujúcou hustotu normálnej distribúcie, podobný. Rozptyly sú



Obr. 4.5: Histogramy parametrov α a σ

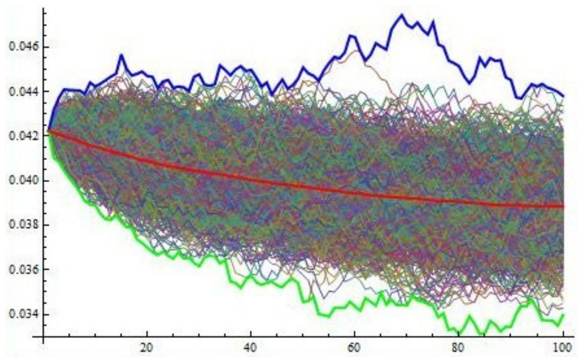
veľmi nízke, čo je pozitívnym faktom pre zhodu odhadov parametrov. Špicatosť sa blíži k číslu 3. Týmito pozorovaniami môžeme skonštatovať, že odhady parametrov α a σ majú približne normálne rozdelenie.

	α	σ
Priemer	-0.000165451	0.00832231
Median	-0.000193828	0.00832623
Rozptyl	$7.12576 * 10^{-7}$	$3.4862 * 10^{-7}$
Int. spoľ.	(-0.000217834, -0.000113068)	(0.00828567, 0.00835895)

Tabuľka 4.2: Popisné štatistiky parametrov Dothanovho modelu

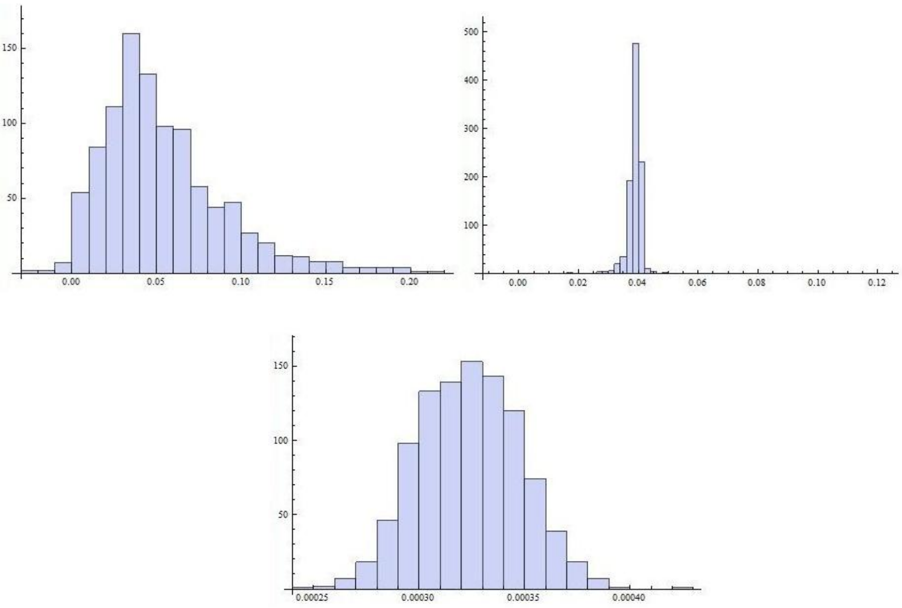
CIR model

V tejto časti použijeme odhady parametrov CIR modelu a následne ich odhadneme metódou najmenších štvorcov aplikovanej na Vašíčkov model. Prebrané parametre z 4.8 sú $k = 0,0225592, \theta = 0,0384364$ a $\sigma = 0,00162519$. Nasimulujeme časové rady podľa $r(t+1) = \alpha + (1 + \beta r(t)) + \sigma\sqrt{r(t)}\varepsilon(t)$. Vývoj sadzby



Obr. 4.6: Simulácia Cox-Ingersoll-Rossovho modelu

v tomto modele má klesajúci charakter, avšak na rozdiel od Vašíčkovho modelu neprekročí nulovú hodnotu.



Obr. 4.7: Histogramy parametrov k, θ a σ

Histogramy a popisné štatistiky majú rovnaký princíp ako v prvom modele. Jedná sa totiž o ten istý postup aplikovaný na simulácie s rôznymi vstupnými údajmi. V porovnaní s odhadmi Vašíčkovho modelu sa líšia len o veľmi malé percento. Priemerná hodnota odhadu parametrov sa ale líši od odhadovania CIR modelom.

	k	θ	σ
Priemer	0.053815	0.0387471	0.000323664
Median	0.045806	0.0390316	0.000323483
Rozptyl	0.001337961	0.0000191496	$5.78735 * 10^{-10}$
Int. spoľ.	(0.0515451, 0.0560848)	(0.0384755, 0.0390186)	(0.000322171, 0.000325157)

Tabuľka 4.3: Popisné štatistiky parametrov Cox-Ingersoll-Rossovho modelu

Záver

V tejto práci sme sa venovali modelom úrokových mier. Zamerali sme sa na simuláciu výnosových kriviek jednotlivými teoretickými modelmi, predovšetkým Vašíčkovým, Dothanovým a Cox-Ingersoll-Rossovým modelom.

Začali sme so základným popisom úročenia, vysvetlili sme rozdiely a vzťahy jednofaktorových modelov úrokových mier. Poukázali sme na dôležitosť úrokovej miery v ekonomickej oblasti, konkrétne pri určovaní výšky poskytnutého úveru, pričom sme opomenuli aj faktory, ktoré výšku sadzby ovplyvňujú.

Popísali sme metódy na numerický odhad parametrov a aplikovali odhadnuté parametre na modely. Popisnými štatistikami a grafmi sme poukázali na nevýhody a odlišnosti vo vývoji časovej štruktúry úrokových sadzieb.

Literatúra

[1] Brigo, D., Mercurio, F.: *Interest Rate Models*. Springer. Berlin 2001.

[2] Dupačová, J., Hurt, J., Štepán, J.: *Stochastic Modeling in Economics and Finance*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht 2002.

[3] Cipra, T.: *Praktický pruvodce finanční a pojistnou matematikou*. Ekopress. Praha 2005.

[4] Výnosy vládnych dlhopisov. NBS Bratislava. http://www.nbs.sk/sk/statisticke-udaje/menova-a-bankova-statistika/statistika-vydanych-cennych-papierov.

[5] Cícha, M.: *Možnosti využití modelu úrokových mer v podmínkách ČR*. Bulletin CES VŠEM, 2010, c. 3, s. 5-7. ISSN 1801-1578.

[6] Stehlíková, B.: *Matematická analýza úrokových mier*. Autoreferát dizertačnej práce FMFI UK. Bratislava 2008.

[7] Papež, M.: *Stochastické modelování úrokových sazeb*. Prednáška Živnostenskej banky. Praha 2010

[8] Pouyan, B., Ahangarani, M.: *An Empirical Estimation and Model Selection of Short-Term Interest Rates.* http://www-scf.usc.edu/ mashayek/paper/2ndyearpaper.pdf

[9] Prokešová, M.: *Základy matematického modelování*. Prednáška na MFF UK. Praha 2009.

[10] Lin, S.: *Introductory stochastic analysis for finance and insurance*. John Wiley and Sons. New Jersey 2006.

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Zoznam príloh

Na priloženom CD sa nachádzajú nasledujúce prílohy

Príloha č. 1: Odhady parametrov (zdrojový kód v Mathematice)
Príloha č. 2: Simulácia modelov (zdrojový kód v Mathematice)
Príloha č. 3: Výnosy štátnych dlhopisov (súbor v Exceli)
Príloha č. 4: elektronická verzia tejto práce

Príloha

Simulacia Vasickovho modelu, odhad parametrov Vasickovym modelom

Vasickov model $\quad$ r(t+1) = k θ + (1 - k) r(t) + σ ϵ(t)

zvolene parametre : k = 0.0227909, θ = 0.0384393 , σ = 0.000319674.

```
n = 1000; (* pocet simulacii *)
T = 100; (* dlzka simulovanej casovej rady *)

data = Drop[First[Import["dennevynosy.xls"]], 1];

vynosy = data[[All, 2]];

ϵ:=RandomReal[NormalDistribution[]]

vasicek:=NestList[(k * θ + (1 − k) * # + σ * ϵ)&, vynosy[[1]], T − 1];

simulacie = Table[vasicek, {i, n}];
ListLinePlot[simulacie]

fitovanie[a_]:=LinearModelFit[Transpose[{Most[a], Rest[a]}], {1, x}, x]

modelfitSimulacie = Map[fitovanie[#]&, simulacie];

parametre = Map[#["BestFitParameters"]&, modelfitSimulacie];
αα = parametre[[All, 1]];
ββ = parametre[[All, 2]];
```

vyjadrenie parametrov modelu, ktore splnaju : α = k θ , β = 1-k

$\mathbf{kk = 1 - \beta\beta;}$

$\boldsymbol{\theta\theta = \alpha\alpha/\mathrm{kk};}$

$\boldsymbol{\sigma\sigma = \mathrm{Map}\left[\sqrt{\#[\text{“EstimatedVariance”}]}\&, \mathrm{modelfitSimulacie}\right];}$

$\mathbf{odhadyParametrov = \{kk, \boldsymbol{\theta\theta}, \boldsymbol{\sigma\sigma}\};}$

histogramy = Map[Histogram, odhadyParametrov]

priemery = Map[Mean, odhadyParametrov]

mediany = Map[Median, odhadyParametrov]

maxima = Map[Max, odhadyParametrov]

minima = Map[Min, odhadyParametrov]

rozptyly = Map[Variance, odhadyParametrov]

smerodOdchylky = Map[StandardDeviation, odhadyParametrov]

sikmosti = Map[Skewness, odhadyParametrov]

spicatosti = Map[Kurtosis, odhadyParametrov]

Needs[“HypothesisTesting”]

intervalyspol = Map[MeanCI, odhadyParametrov]

Simulacia Dothanovho modelu, odhad parametrov Dothanovym modelom

Dothanov model $\quad$ dr(t) = α r(t) dt + σ r(t) dW(t)

zvolene parametre : α = - 0.00012151, σ = 0.00836305.

ϵ:=RandomReal[NormalDistribution[]]

dothan:=NestList[((1 + α) * # + σ * # * ϵ)&, vynosy[[1]], $T - 1$];

simulacie = Table[dothan, {i, n}];

ListLinePlot[simulacie]

funkcia[x_, α_, σ_]:=Total $\left[-\frac{1}{2} * \text{Log}\left[(\sigma * \text{Most}[x])^2\right] - \frac{1}{2} * \left(\frac{\text{Rest}[x]-(1+\alpha)*\text{Most}[x]}{\sigma*\text{Most}[x]}\right)^2\right]$

fitovanie[x_]:=First [Solve [{∂_afunkcia[x, a, s], ∂_sfunkcia[x, a, s]} == {0, 0}&&$s > 0$, {a, s}]]

modelfitSimulacie = Map[fitovanie[#]&, simulacie];

$\alpha\alpha = a$/.modelfitSimulacie;

$\sigma\sigma = s$/.modelfitSimulacie;

odhadyParametrov = {$\alpha\alpha, \sigma\sigma$};

Histogramy a popisne statistiky -> rovnaky postup ako v predoslom modele

Simulacia modelu CIR, odhad parametrov Vasickovym modelom

CIR model $\quad$ dr(t) = k(θ - r(t))dt + $\sigma\sqrt{r(t)}$dW(t)

zvolene parametre : $\quad$ k = 0.0225592, $\quad \theta = 0.0384364, \quad \sigma = 0.00162519$.

ϵ:=RandomReal[NormalDistribution[]]

cir:=NestList $\left[\left(k * \theta + (1 - k) * \# + \sigma\sqrt{\#} * \epsilon\right) \&, \text{vynosy}[[1]], T - 1\right]$;

simulacie = Table[cir, {i, n}];

ListLinePlot[simulacie]

fitovanie[a_]:=LinearModelFit[Transpose[{Most[a], Rest[a]}], {1, x}, x]

modelfitSimulacie = Map[fitovanie[#]&, simulacie];

parametre = Map[#["BestFitParameters"]&, modelfitSimulacie];

$\alpha\alpha$ = parametre[[All, 1]];

$\beta\beta$ = parametre[[All, 2]];

vyjadrenie parametrov modelu, ktore splnaju : α = k θ , β = 1-k

kk = 1 − $\beta\beta$;

$\theta\theta$ = $\alpha\alpha$/kk;

$\sigma\sigma$ = Map$\left[\sqrt{\#[\text{"EstimatedVariance"}]}\&, \text{modelfitSimulacie}\right]$;

odhadyParametrov = {kk, $\theta\theta$, $\sigma\sigma$};

Histogramy a popisne statistiky -> rovnaky postup ako v predoslom modele